

SEGUNDA PRÁCTICA DE CALCULO NUMERICO
 PARTE B (Solucionario)

Apellidos y Nombres	Código	Sección	Nota

SE PERMITE UNA HOJA DE FORMULARIO.

Marque la alternativa que considere correcta o complete según el caso:

Problema 1

a) Para que valores de a , el siguiente sistema converge, al usar el método de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$Tg = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\det(Tg - \lambda I) = -\lambda (a-1-\lambda) \Rightarrow \varepsilon(A) = \{0, a-1\}$$

$$\rho(Tg) = |a-1| < 1 \therefore \text{converge si y solo si } 0 < a < 2$$

b) Si $a = 0$ y $w = 0.8$ (subrelajación) realice 03 iteraciones. ¿Converge el método?
 Justifique.

Algoritmo:

Solución

$$\hat{x}_1^{(n+1)} = 3 - x_2^{(n)}$$

$$x_1^{(n+1)} = w\hat{x}_1^{(n+1)} + (1-w)x_1^{(n)}$$

$$\hat{x}_2^{(n+1)} = 1 + x_1^{(n+1)}$$

$$x_2^{(n+1)} = w\hat{x}_2^{(n+1)} + (1-w)x_2^{(n)}$$

Iteraciones	x1	x2
0	0	0
1	2.4	2.72
2	0.7040	1.9072
3	1.0150	1.9935

Converge!!

Problema 2

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

- a) El método de la potencia converge al dominante para cualquier vector inicial arbitrario.
- b) La multiplicidad geométrica es igual a la multiplicidad aritmética
- c) Si aplicamos el método de la potencia inversa iterada con $q=0$ tenderá al valor propio máximo del sistema.
- d) Tiene un valor propio dominante
- e) N.A.

Problema 3

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$. Encuentre el espectro de A y la Matriz de Vectores propios Q y analice si es posible ponerlo a su forma diagonal en bloques?. Realice $Q^{-1}AQ$.

Solución

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda + 2)^2 \quad \varepsilon(A) = \{-2\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2a = -b$$

$$a = -\frac{b}{2} = -\frac{t}{2}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Valores Propios Generalizados: $(A - 2I)x_2 = x_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2c + d = -1/2$$

$$d = 0$$

$$c = -1/4$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ$$

Problema 4

En la ecuación $x^2 - 4 \operatorname{sen}(x) = 0$, se ha establecido que existe una raíz en $[1, 2]$, Cuantas iteraciones usando el método del punto fijo ($x = g(x)$) serán necesarias, para que la raíz tenga una aproximación en 5 cifras decimales exactas? Sug. Tome $x_0 = 1.5$, $L = |g'(\xi)|_{\xi=2}$

- a) 5 b) 24 **c) 15** d) 38 e) N.A.

Problema 5

Teniendo en cuenta que el método de Gauss – Seidel es convergente cuando la matriz A es simétrica y definida positiva encuentre para que valores de a es convergente la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & K & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 & K & M \\ M & M & M & O & M \\ 1 & 1 & 1 & K & a-8 \end{pmatrix}$$

- a) $a > 9$** b) $-1 < a < 1$ c) $a > 8$ d) $-2 \leq a \leq 2$ e) $a > 2$

Problema 6

Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}$$

Escriba un programa en MATLAB para hallar la multiplicidad geométrica asociada al valor propio dominante.

Solución

```
A=[12 -4; -8 8]
Espectro=eig(A)
[m,p]=max(abs(Espectro))
vpd=Espectro(p)
ma=2-rank(A-vpd*eye(2))
```

Problema 7

¿Cuántas iteraciones del método de bisección se necesitan para aproximar la menor raíz positiva de la ecuación $x - \tan x = 0$, con una precisión de 3 cifras decimales exactas, empezando con un intervalo [a,b] que contenga a dicha raíz y b-a=0.1?

Solución

$$\frac{b-a}{2^n} < TOL \Rightarrow b-a = 0.1 \quad TOL = 0.5 \times 10^{-3} \Rightarrow n = 8 \text{ iteraciones.}$$

Problema 8

Sea la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$, la cual tiene una raíz cercana a 1.5, seleccione cual o cuales de las siguientes formas de iteración de punto fijo son divergentes:

a) $g(x) = x^2 - 2$ b) $g(x) = \sqrt{x+2}$ c) $g(x) = 1 + 2/x$ d) $g(x) = \frac{x^2 + 2}{2x - 1}$ e) N.A.

Problema 9

Sea: $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, ¿cuál de los siguientes es un vector propio de A?

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e) N.A.

Problema 10

Sea el sistema: $\begin{bmatrix} 10 & \frac{\alpha + 5}{2} \\ \frac{\alpha + 4}{2} & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, si α es el último dígito de su código entonces el

radio espectral de Jacobí será:

Las instrucciones en MATLAB serán:

Solución

```
Acu=[];
for a=0:9
    A=[10 (a+5)/2; (a+4)/2 20];
    D=diag(diag(A));
    L=D-tril(A);
    U=D-triu(A);
    Tj=inv(D)*(L+U);
    Rho=max(abs(eig(Tj)));
    Acu=[Acu;a Rho];
end
disp(Acu)
```

```
a Radio Espectral de Jacobi
0 0.1581
1 0.1936
2 0.2291
3 0.2646
4 0.3000
5 0.3354
6 0.3708
7 0.4062
8 0.4416
9 0.4770
```